



## **ESTUDO DA INFLUÊNCIA DE MOVIMENTOS INTERNOS, MODELADOS POR UM SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR, NA ATITUDE DE UM SATÉLITE**

**Isabel Maria de Moraes**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Departamento de Mecânica Espacial e Controle  
Cx. P. 515 – 12201-970 – São José dos Campos, SP, Brasil

**Wilson Custódio Canesin da Silva**

Universidade Braz Cubas – UBC, Mogi das Cruzes, SP, Brasil

Endereço residencial: Rua Guilherme de Almeida, 91, Jardim Renata, e-mail  
canesin@iconet.com.br

12245-100 – São José dos Campos, SP, Brasil

***Resumo.** Todos os satélites possuem componentes que podem deslocar-se de um lado para outro, do tipo combustível líquido num tanque, ou oscilar como se fosse um sistema massa-mola com amortecimento ou não. Esses deslocamentos ou vibrações produzem oscilações no próprio veículo, perturbando sua atitude (movimento em torno do centro de massa).*

*O objetivo deste trabalho é estudar essas perturbações usando um sistema massa-mola-amortecedor para simular essas vibrações e quantificar seus efeitos no movimento de atitude do satélite, ou seja, em suas velocidades angulares e em seus ângulos de atitude.*

**Palavras-chaves:** Vibrações, Massa-mola-amortecedor, Atitude

### **1. INTRODUÇÃO**

Em seu movimento orbital um satélite sujeito à ação das forças ambientais sempre apresenta componentes internos que podem oscilar ou se deslocar como o combustível ou alguma massa que por hipótese se desprender. Essas oscilações de uma certa forma se transmitem para o momento angular do satélite, afetando sua atitude.

Satélites com experimentos de micro-gravidade cujas rotações nos eixos devem ser inferiores a  $10^{-2}$  rad/s para que as acelerações causadas não passem de  $10^{-6}$  da gravidade, não podem ter oscilações muito grande ou rotações induzidas que possam perturbar o experimento (Moraes & Silva, 1997; Hung, Lee & Shyu, 1991). Neste trabalho o satélite é considerado um corpo rígido, porém contendo uma massa perturbadora ( $m_d$ ) que pode oscilar dentro de um compartimento de volume desprezível que é fixo no corpo rígido. A massa é presa numa mola de constante elástica  $k_d$  e seu movimento é amortecido por um amortecedor linear viscoso de constante  $c_d$ . A interação do sistema massa-mola-amortecedor com o corpo, conduz a uma

pequena dissipação de energia do sistema, mas seu momento angular permanece quase constante no intervalo de algumas órbitas, apresentando somente oscilações.

A simulação é feita inicialmente com a mola na horizontal (no plano  $x, y$  do sistema do veículo) e posteriormente, com a mola na vertical, isto é, ao longo de seu eixo  $z$ .

## 2. SISTEMA CORPO RÍGIDO-OSCILADOR

A Fig. 1 mostra um corpo rígido genérico com um sistema massa-mola-amortecedor confinado dentro de uma canaleta de volume negligenciável. A massa  $m_d$  é considerada puntiforme.

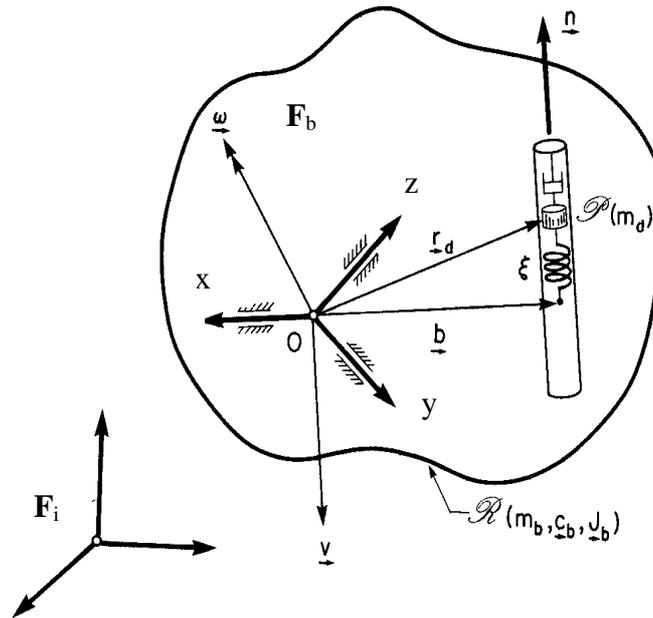


Figura 1 – Corpo rígido com sistema massa-mola-amortecedor fixo internamente.

$\mathbf{F}_i = \{X, Y, Z\}$  é um sistema fixo (inercial) no centro da Terra e  $\mathbf{F}_b = \{x, y, z\}$  é um sistema de eixos solidário ao veículo e com origem no ponto  $O$ , que não coincide com seu centro de massa (do corpo rígido).

A posição da massa  $m_d$  oscilante é dada por  $\vec{r}_d = \vec{b} + \xi \hat{n}$ , onde  $\xi$  é a elongação da mola num dado instante,  $\vec{b}$  é o vetor que vai da origem  $O$  do sistema do veículo até o ponto de fixação da mola e  $\hat{n}$  é um versor na direção de oscilação da mola (canaleta).

### 2.1 Matriz de Inércia

Considerando-se um elemento de massa  $dm$ , posicionado por  $\vec{r}$ , com origem no sistema do corpo rígido valem as expressões

$$\vec{c}_b = m_b \vec{r}_c = \int \vec{r} dm \quad (1)$$

$$\mathbf{J}_b = \int_m (r^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}\mathbf{r}^T) dm \quad (2)$$

onde  $\vec{c}_b$  é o vetor distância da origem O ao CM do veículo, isto é,  $\vec{r}_c$ , multiplicado por sua massa  $m_b$  e  $\mathbf{J}_b$  é a matriz de inércia do corpo rígido.

Levando em conta a massa perturbadora (presa à mola) estas duas expressões escritas para todo o sistema, resultam em

$$\vec{c} = \vec{c}_b + m_d \vec{r}_d \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + m_d (r_d^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_d \mathbf{r}_d^T) \quad (4)$$

A velocidade de um elemento de massa no corpo rígido é  $\vec{V} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$  onde  $\vec{v}$  é a velocidade do ponto O e  $\vec{\omega}$  é a velocidade de rotação do satélite em relação ao sistema fixo  $\mathbf{F}_i$ .

## 2.2 Quantidade de Movimento e Momento Angular

A velocidade do ponto P é dada por  $\vec{v}_p = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_d + \dot{\xi} \hat{n}$ , assim a quantidade de movimento  $\vec{p}$ , o  $p_n$  que é a projeção da quantidade de movimento  $\vec{p}_d$  da massa  $m_d$  na direção  $\hat{n}$  e o momento angular  $\vec{h}$  do sistema, podem ser escritas em função das componentes dos vetores na forma matricial como

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} - \mathbf{c}^X \mathbf{w} + m_d \dot{\xi} \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{c}^X \mathbf{v} + \mathbf{J} \mathbf{w} + m_d \dot{\xi} \mathbf{b}^X \mathbf{n} \quad (6)$$

$$p_n = m_d ( \mathbf{n}^T \mathbf{v} - \mathbf{n}^T \mathbf{b}^X \mathbf{w} + \dot{\xi} ) \quad (7)$$

onde  $\mathbf{v} = (v_x \ v_y \ v_z)^T$ ,  $\mathbf{w} = (w_x \ w_y \ w_z)^T$ ,  $\mathbf{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T$ ,  $\mathbf{c} = (c_x \ c_y \ c_z)^T$ ,  $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$ ,  $\mathbf{J}$  é a matriz de inércia do sistema e as matrizes do tipo  $\mathbf{A}^X$  são anti-simétricas de diagonal nula, ou seja

$$\mathbf{A}^X = \begin{pmatrix} 0 & -A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

As três “Eqs. (5), (6) e (7)” podem ser unidas em uma só na forma

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \mathbf{V} \quad (9)$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{h} \\ p_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} \quad (11)$$

e  $\mathbf{M}$  é uma matriz cujos elementos são matrizes da forma

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & -\mathbf{c}^X & m_d \mathbf{n} \\ \mathbf{c}^X & \mathbf{J} & m_d \mathbf{b}^X \mathbf{n} \\ m_d & -m_d \mathbf{n}^T \mathbf{b}^X & m_d \end{pmatrix} \quad (12)$$

e

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} \quad (13)$$

### 2.3 Dinâmica do Sistema

As equações dinâmicas do sistema são dadas pelas derivadas no sistema do corpo de  $\bar{\mathbf{p}}$ ,  $\bar{\mathbf{h}}$  e  $\mathbf{p}_n$ , onde, escrevendo as componentes dos vetores na forma matricial (Hughes, 1986), resultam em:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{w}^X \mathbf{p} + \mathbf{f} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = -\mathbf{w}^X \mathbf{h} - \mathbf{v}^X \mathbf{p} + \mathbf{g} \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_n = m_d \mathbf{w}^T \mathbf{n}^X (\mathbf{v} - \mathbf{r}_d^X \mathbf{w}) - c_d \dot{\xi} - k_d \xi \quad (16)$$

onde, o produto de matrizes  $\mathbf{w}^T \mathbf{n}^X (\mathbf{v} - \mathbf{r}_d^X \mathbf{w})$ , resulta em um escalar.

### 2.4 Atitude do Veículo

O movimento de atitude é aquele em torno do centro de massa do veículo ou de um ponto fixo em seu interior. No presente caso foi considerado que quando a massa  $m_d$  está fixa em sua origem, o ponto O tomado como origem do sistema do corpo, coincide com o centro de massa do veículo e a matriz de inércia neste caso é diagonal. Porém quando a massa começa a oscilar, a distribuição de massa do veículo é ligeiramente modificada e esses dois pontos ( O e CM ) não mais coincidem. A atitude passa a ser estudada em relação ao ponto O e a matriz de inércia  $\mathbf{J}$  é uma matriz com todos os elementos ( completa ) e função da posição da massa  $m_d$ .

A matriz de atitude que transforma o sistema de referência orbital para o sistema do veículo é do tipo  $R_{123}$  e as rotações são na ordem: arfagem, guinada e rolamento, ou “pitch”, “yaw” e “roll”. Esses três ângulos são representados por  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$ .

As equações de movimento do sistema serão dadas pelas Equações (14), (15) e (16), mais uma equação para a posição do veículo que é  $\dot{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\mathbf{V}}$ , que no sistema do corpo é  $\dot{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\mathbf{w}} \times \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{V}}$ , mais uma equação, obtida da Eq. 7, para  $\dot{\xi}$  e mais a equação da atitude, ou seja,  $\dot{\Theta} = f(\psi, \theta, \phi)$ .

Assim, o conjunto completo de equações de movimento do sistema, a ser integrado é

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{w}^X \mathbf{p} + \mathbf{f} \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = -\mathbf{w}^X \mathbf{h} - \mathbf{v}^X \mathbf{p} + \mathbf{g} \quad (18)$$

$$\dot{p}_n = m_d \mathbf{w}^T \mathbf{n}^X (\mathbf{v} - \mathbf{r}_d^X \mathbf{w}) - c_d \dot{\xi} - k_d \xi \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{w}^X \mathbf{R} + \mathbf{v} \quad (20)$$

$$\dot{\xi} = p_n/m_d - \mathbf{n}^T (\mathbf{v} + \mathbf{b}^X \mathbf{w}) \quad (21)$$

$$\dot{\Theta} = \mathbf{B}^{-1} (\psi, \theta, \phi) \mathbf{w} \quad (22)$$

onde, o produto de matrizes  $\mathbf{n}^T (\mathbf{v} + \mathbf{b}^X \mathbf{w})$  resulta em um escalar e  $\mathbf{f}$  é a somatória das forças externas, que nessa simulação foi considerada somente a força gravitacional da Terra incluindo a perturbação devida ao achatamento terrestre.  $\mathbf{g}$  são os torques externos, aqui não considerados porque o que se pretende é verificar a influência pura de oscilações internas no movimento não perturbado externamente.

## 2.5 Resultados

Os testes foram realizados para um satélite de massa  $m = 100.0$  kg, matriz de inércia inicial  $\mathbf{J}_b = \{23.0 \ 23.0 \ 12.0\}^T$  kg m<sup>2</sup>, altura  $h \cong 551.0$  km, excentricidade  $e = 0.01$ , valores iniciais  $\mathbf{v} = \{-6.29 \ 3.27 \ 2.79\}^T$  m/s,  $\mathbf{w} = \{0.01 \ 0.01 \ 5.0\}^T$  rad/s,  $\mathbf{w} = \{0.01 \ 0.01 \ 0.03\}^T$  rad/s,  $\mathbf{R} = \{3627.3 \ 5720.4 \ 1464.4\}^T$  m,  $\Theta = \{\psi \ \theta \ \phi\}^T = \{0.0 \ 0.0 \ 0.0\}$  graus. Em relação a mola,  $m_d = 0.1$  kg,  $\xi = 0.0$  m,  $\dot{\xi} = 0.0$  m/s,  $k = 2.5$  N/m,  $c_d = 1$  rad m,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ .

Como o objetivo é estudar os efeitos das oscilações na atitude do veículo, só são apresentados as velocidades angulares, os ângulos de atitude e o momento angular do veículo.

Nas simulações foram usados dois vetores iniciais  $\mathbf{w}$ , ou seja, um caso de média rotação e outro de baixa rotação e dois ângulos  $\beta$ , mantendo os outros parâmetros. O sistema massa-mola-amortecedor pode ser visto na Fig. 2.

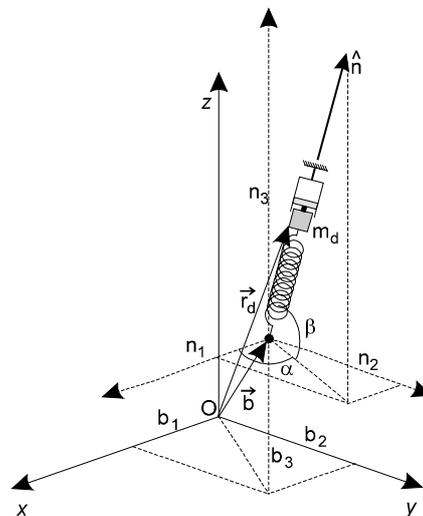


Figura 2 – Sistema massa-mola-amortecedor.

A Fig. 3 mostra a velocidade angular relativa ao eixo x ( $w_x$ ). A velocidade angular relativa ao eixo y não foi apresentada por ser igual a  $w_x$ . A velocidade angular relativa ao eixo z não tem variação significativa. As Figs. 4 e 5 mostram o ângulos de atitude, exceto o “roll” que oscila sempre, em qualquer caso, de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ ; a Fig. 6 mostra o momento angular total. Estas figuras foram feitas para o caso  $\mathbf{w} = \{ 0.01 \ 0.01 \ 5.0 \}^T$ , ou seja, de média rotação e  $\beta=0^\circ$ .

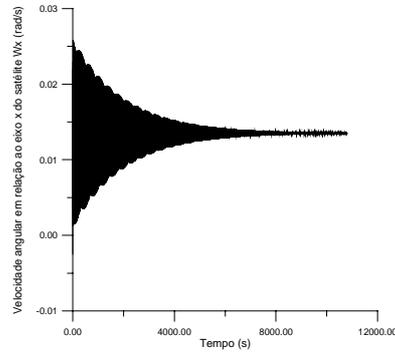


Figura 3 – Velocidade angular  $w_x$  relativa ao eixo x.

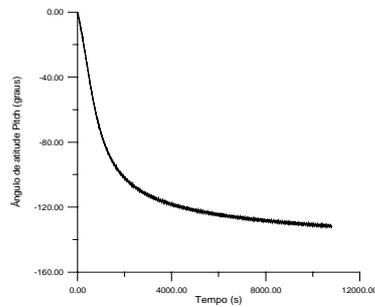


Figura 4 – Ângulo de atitude pitch ( $\Psi$ ).

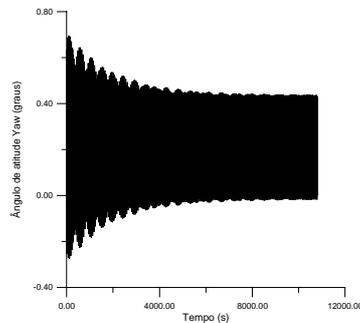


Figura 5 – Ângulo de atitude yaw ( $\theta$ ).

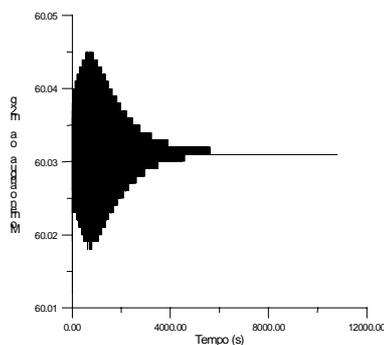


Figura 6 – Momento angular total.

A Fig. 7 mostra a velocidade angular relativa ao eixo x ( $w_x$ ). Apesar do pequeno crescimento de  $w_x$ , a velocidade no eixo z diminui como mostra o decaimento do momento angular Fig. 10. Estas figuras foram feitas para o caso  $w = \{0.01 \ 0.01 \ 5.0\}^T$ ,  $\beta=90^\circ$ .

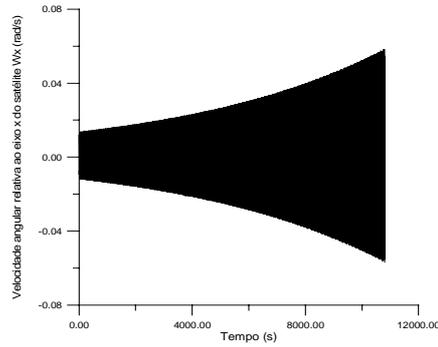


Figura 7 – Velocidade angular  $w_x$  relativa ao eixo x.

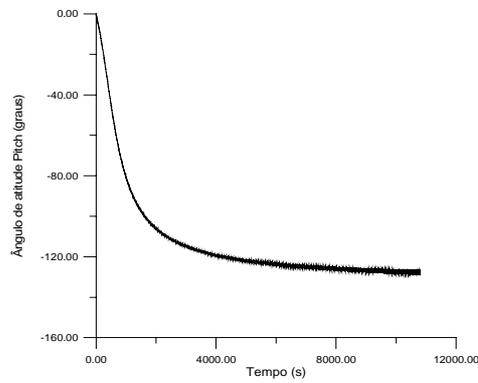


Figura 8 – Ângulo de atitude pitch ( $\Psi$ ).

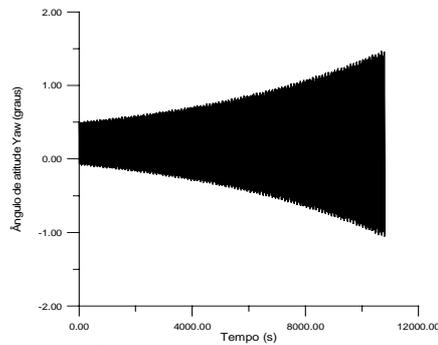


Figura 9 – Ângulo de atitude yaw ( $\theta$ ).

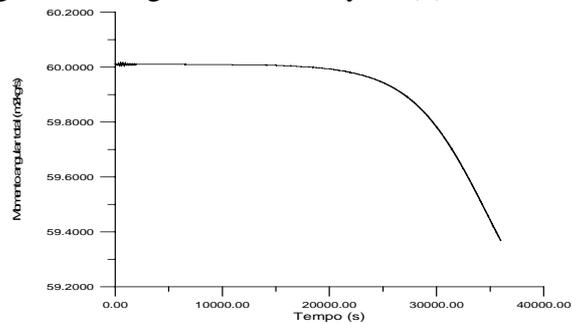


Figura 10 – Momento angular total.

Os gráficos das velocidades angulares  $w_x$  e  $w_y$  não são apresentados porque elas não mudam só oscilam com valor absoluto igual ao valor inicial;  $w_z$  não tem variação significativa. A Fig. 11 mostra o ângulo de atitude pitch ( $\Psi$ ) e a Fig. 12, o ângulo de atitude yaw ( $\theta$ ), ambos oscilam inicialmente ao mesmo tempo que sofrem variações de longo período da ordem de seis órbitas .A Fig. 13 mostra o momento angular total que apresenta pequenas oscilações em torno de um valor médio. Estas figuras foram feitas para o caso  $\mathbf{w} = \{0.01 \ 0.01 \ 0.03\}^T$ ,  $\beta=0^\circ$ .

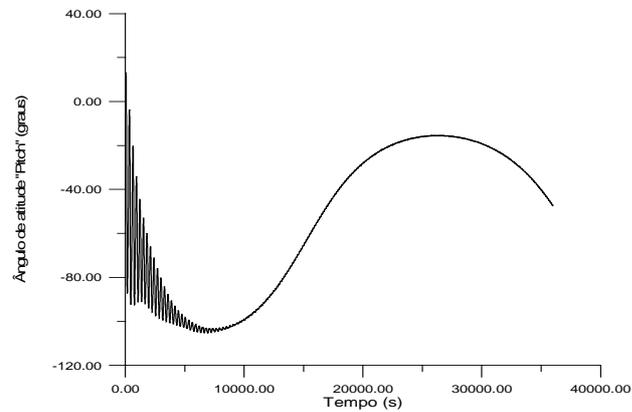


Figura 11 – Ângulo de atitude pitch ( $\Psi$ ).

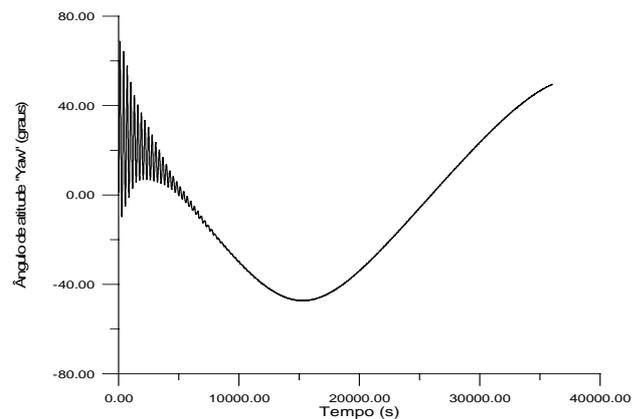


Figura 12 – Ângulo de atitude yaw ( $\theta$ ).

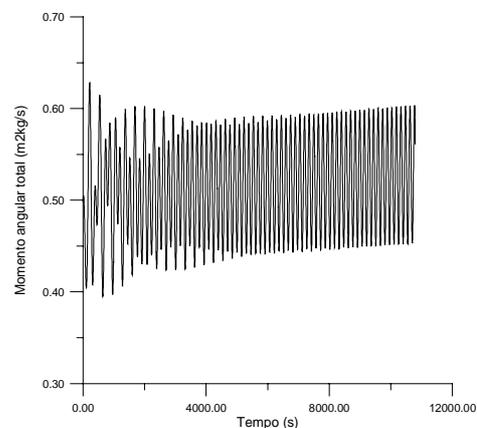


Figura 13 – Momento angular total.

Os gráficos das velocidades angulares neste caso não são apresentados porque, como no caso anterior elas não mudam só oscilam com valor absoluto igual ao valor inicial, para  $w_x$  e  $w_y$ ;  $w_z$  não tem variação significativa. A Fig. 14 mostra o ângulo de atitude pitch ( $\Psi$ ). A Fig. 15 mostra o angulo de atitude yaw ( $\theta$ ).O momento angular total não tem nenhuma variação significativa. Estas figuras foram feitas para o caso  $\mathbf{w} = \{0.01 \ 0.01 \ 0.03\}^T$ ,  $\beta=90^\circ$ .

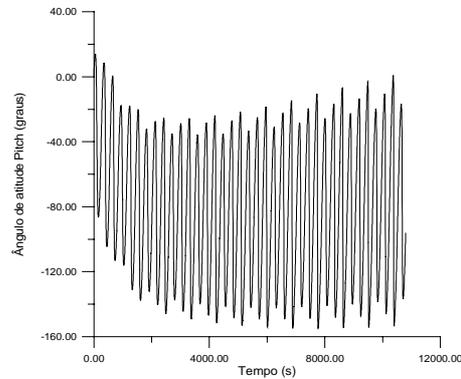


Figura 14 – Ângulo de atitude pitch ( $\Psi$ ).

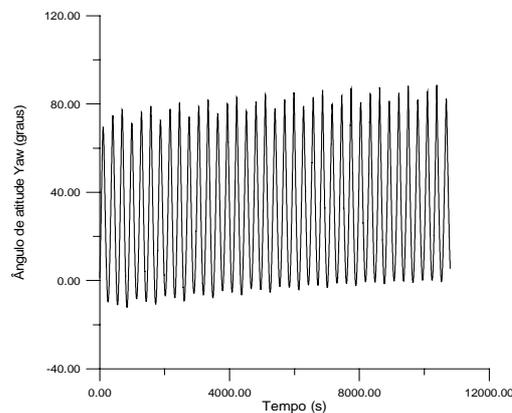


Figura 15 – Ângulo de atitude yaw ( $\theta$ ).

## 2.6 Conclusões

Os resultados foram obtidos para um tempo aproximado de duas órbitas do satélite em alguns casos e para seis órbitas de satélite em outros. Durante este tempo, para o caso  $\mathbf{w} = \{0.01 \ 0.01 \ 5.0\}^T$  rad/s e  $\beta = 0^\circ$ , ou seja, mola na horizontal., as velocidades angulares  $w_x$  e  $w_y$  oscilam inicialmente com amplitude maior, diminuindo com o tempo. Em relação ao eixo z,  $w_z$  tem uma ligeira queda no início estabilizando logo em seguida com um valor próximo ao inicial. Neste caso as velocidades angulares são pouco afetadas pelo sistema massa-mola-amortecedor.

O momento angular oscila em torno de um valor pequeno e depois estabiliza, há portanto pouca dissipação de energia.

O ângulo de atitude pitch, relativo ao eixo z do satélite, decresce até  $-120^\circ$  onde estabiliza. Se houver necessidade de apontamento é necessário a utilização de algum tipo de controle de atitude. O ângulo de atitude yaw, relativo ao eixo y do satélite, oscila em torno de um valor pequeno, não havendo portanto necessidade de correção. O ângulo de atitude roll mantém-se de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  e não requer correções.

Para o caso  $\mathbf{w} = \{0.01 \ 0.01 \ 5.0\}^T$  rad/s e  $\beta = 90^\circ$ , ou seja, mola na vertical, as velocidades angulares  $w_x$  e  $w_y$  do satélite oscilam inicialmente em torno do valor inicial

tendendo a crescer ligeiramente com o tempo, enquanto a velocidade angular  $w_z$  decresce lentamente, de forma que o momento angular total também decresça, conforme a Fig. 10. Esta situação, em termos de velocidade angular, pode vir a requerer algum tipo de controle para diminuir as velocidades  $w_x$  e  $w_y$ .

O ângulo de atitude pitch, decresce até  $-120^\circ$  onde oscila em torno deste valor. O ângulo de atitude yaw oscila em torno do valor inicial e sua amplitude tende a crescer cerca de um grau em duas órbitas. Em ambos os casos, se houver necessidade de apontamento, é necessário a utilização de algum mecanismo de controle.

Para o caso  $\mathbf{w} = \{0.01 \ 0.01 \ 0.03\}^T$  rad/s e  $\beta = 0^\circ$ , o ângulo de atitude pitch oscila próximo de  $-50^\circ$  com amplitude em torno de  $50^\circ$ . O ângulo de atitude yaw oscila em torno de  $0^\circ$  com amplitude aproximada de  $55^\circ$ .

O momento angular total, depois de aproximadamente meia órbita, passa a oscilar dentro de uma faixa de valores que vão de  $0.45$  à  $0.60 \text{ m}^2\text{kg/s}$ .

Para o caso  $\mathbf{w} = \{0.01 \ 0.01 \ 0.03\}^T$  rad/s e  $\beta = 90^\circ$ , o ângulo de atitude pitch oscila entre os valores de  $0^\circ$  e  $-160^\circ$ . O ângulo de atitude yaw oscila entre os valores de  $0^\circ$  e  $80^\circ$ . Em ambos os casos, se houver necessidade de apontamento, é necessário a utilização de algum mecanismo de controle.

De um modo geral as oscilações da mola introduzem variações de atitude embora não causem mudanças significativas no momento angular.

### ***Agradecimentos***

Nossos agradecimentos ao Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT), ao Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE) e ao Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq) por possibilitarem o apoio necessário para a realização deste trabalho.

### **REFERÊNCIAS**

- Hughes, P. C., 1986, Spacecraft Attitude Dynamics, New York, John Wiley.
- Hung, R. J., Lee, C. C. & Shyu, K. L., 1991, Reorientation of rotating fluid in microgravity environment with or without gravity jitters, J. Spacecraft, January-February, vol. 28, n° 1, pp.71-78.
- Moraes, I. M. & Silva, W. C. C., 1997, Análise de perturbações devidas a forças e torques no ambiente de micro-gravidade de um satélite, Tese de Doutorado do curso de Mecânica Orbital e Controle, INPE, São José dos Campos.

### **STUDY OF THE INFLUENCE OF INTERNAL MOVEMENTS, MODELED BY A MASS-SPRING-DAMPER SYSTEM, IN THE ATTITUDE OF A SATELLITE**

***Abstract.*** All the satellites possess componentes that can move to and fro, as a liquid combustible in a tank, or to oscillate as if it was a mass-spring-damper system with damping or not. Those displacements or oscillations produce oscillations in the proper vehicle, disturbing its attitude (moviment around the mass center).

*The objective of this work is to study those disturbances using a mass-spring-damper system to simulate those vibrations and to quantify its effects in the satellite attitude moviment, that means, in its angular velocities and attitude angles.*

**Keywords:** Vibrations, Mass-spring-damper, Attitude